$$= \varkappa' n + \varkappa n' \underset{(2)_2}{=} \varkappa' n - \varkappa^2 t - \varkappa\tau b,$$

und Einsetzen ergibt:

$$\tau_\alpha = -\frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|^2} \circ \alpha''' \overset{(2)_1}{=}$$

$$-\frac{t \times \varkappa n}{|t \times \varkappa n|^2} \cdot (\varkappa' n - \varkappa^2 t - \varkappa\tau b) =$$

$$\varkappa\tau \frac{t \times \varkappa n}{|t \times \varkappa n|^2} \cdot b = \tau \frac{(t \times n)\cdot b}{|t \times n|^2} = \tau.$$

Setzt man jetzt $\tilde{\alpha}(s) := \alpha_0 + \alpha(s)$, so ist gezeigt: Die Kurve $\tilde{\alpha}$ ist nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\varkappa_{\tilde{\alpha}} = \varkappa$, $\tau_{\tilde{\alpha}} = \tau$ und den Anfangsbedingungen

$$(*) \begin{cases} t_{\tilde{\alpha}}(s_0) = t_0, \quad n_{\tilde{\alpha}}(s_0) = n_0, \quad b_{\tilde{\alpha}}(s_0) = b_0, \\ \tilde{\alpha}(s_0) = \alpha_0, \end{cases}$$

insbesondere haben wir die Existenz von Kurven mit

Krümmung $= \varkappa$ und Torsion $= \tau$ bewiesen einschließlich der Existenzaussage aus a). Sei jetzt $\tilde{\beta} : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\varkappa_{\tilde{\beta}} = \varkappa$ und $\tau_{\tilde{\beta}} = \tau$ sowie der Anfangsbedingung ⊛. Dann erfüllen $t_{\tilde{\beta}}, n_{\tilde{\beta}}, b_{\tilde{\beta}}$ die Frenet'schen Formeln, d.h. $(t_{\tilde{\beta}}, n_{\tilde{\beta}}, b_{\tilde{\beta}})$ löst (2), und da die Anfangswerte fixiert sind, folgt wegen der eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems zu (2) sofort

$$t_{\tilde{\beta}} = t_{\tilde{\alpha}}, \quad n_{\tilde{\beta}} = n_{\tilde{\alpha}}, \quad b_{\tilde{\beta}} = b_{\tilde{\alpha}} .$$

Gemäß $\frac{d}{ds} \tilde{\beta}(s) = t_{\tilde{\beta}}(s)$ gilt

$$\frac{d}{ds} (\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})(s) \equiv 0,$$

was wegen $\tilde{\alpha}(s_0) = \alpha_0 = \tilde{\beta}(s_0)$ dann insgesamt $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$ ergibt, womit a) des Theorems ganz bewiesen ist.

Wir kommen zur Aussage b): Seien $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$

nach der Bogenlänge parametrisiert mit Krümmung $= \varkappa$ und Torsion $= \tau$. Wir betrachten die orthogonale Transformation $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$t_\beta(s_0) = S(t_\alpha(s_0)), \quad n_\beta(s_0) = S(n_\alpha(s_0)),$$

$$b_\beta(s_0) = S(b_\alpha(s_0)).$$

Die Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, $\gamma := S(\alpha)$, ist nach der Bogenlänge parametrisiert mit (s.o.)

$$t_\gamma(s_0) = t_\beta(s_0), \quad n_\gamma(s_0) = n_\beta(s_0), \quad b_\gamma(s_0) = b_\beta(s_0),$$

und da $(t_\beta, n_\beta, b_\beta)$, $(t_\gamma, n_\gamma, b_\gamma)$ "(2) erfüllen müssen" (Frenet'sche Formeln unter Beachtung von $\varkappa_\gamma = \varkappa$, $\tau_\gamma = \tau$), folgt $(t_\gamma, n_\gamma, b_\gamma) = (t_\beta, n_\beta, b_\beta)$ auf I, speziell

$$\frac{d}{ds}\big(\gamma(s) - \beta(s)\big) = t_\gamma(s) - t_\beta(s) = 0,$$

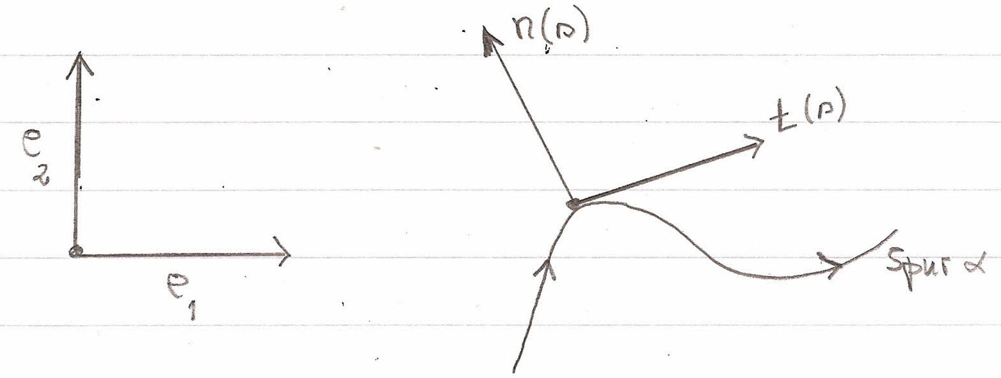
m.a.W.: $$\beta(s) = S(\alpha(s)) + c, \quad s \in I,$$

für einen Vektor $c \in \mathbb{R}^3$.

$\square$

§3 Globale Eigenschaften ebener Kurven

In diesem Abschnitt betrachten wir nur Kurven mit Spur in $\mathbb{R}^2$, die wie immer nach der Bogenlänge parametrisiert sein sollen. Wir legen hier den Begriff der orientierten Krümmung zugrunde (Symbol $\varkappa$), die wie folgt definiert ist (vgl. §2): Es sei



$n(s) :=$ der 1-Vektor $\perp$ $t(s)$, so dass $(t(s), n(s))$ gleich orientiert zu (e_1, e_2).
(Hauptnormalenvektor)

Wegen $0 = \frac{d}{ds}(t \cdot t)$ ist $t' \perp t$, d.h. es gilt mit $\varkappa(s) \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$t'(s) = \varkappa(s)\, n(s).$$

<u>Definition</u>: a) Eine (reguläre) Kurve $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ heißt <u>geschlossen</u>, wenn gilt $\alpha^{(k)}(a) = \alpha^{(k)}(b)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

b) Die geschlossene Kurve heißt <u>einfach geschlossen</u>, wenn $\alpha|_{[a,b)}$ injektiv ist.

<u>Bemerkungen</u>: 1.) Da wir mit C^∞-Kurven arbeiten, ist a) die in diesem Kontext passende Version von Geschlossenheit und nicht wie bei nur stetigen Kurven die Bedingung $\alpha(a) = \alpha(b)$. Beschränkt man sich auf C^m-Kurven, so hätte man entsprechend zu fordern $\alpha^{(k)}(a) = \alpha^{(k)}(b)$ $\forall\, k \leq m$.

2.) Die Kreislinie $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ ist z.B. geschlossen und auch einfach geschlossen.

3.) Man überlegt sich leicht: $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ist geschlossen genau dann, wenn es eine (reguläre) Kurve

$\tilde{\alpha}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gibt mit $\tilde{\alpha}|_{[a,b]} = \alpha$ und

$\tilde{\alpha}(t + (b-a)) = \tilde{\alpha}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h. $\tilde{\alpha}$ ist

periodisch mit Periode $b-a$.

$\square$

Wir beginnen mit einigen einfachen Aussagen globaler Natur

<u>Satz:</u> Sei $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert. a) Ist $\varkappa_\alpha \equiv 0$, so ist Spur α in einer Geraden enthalten. b) Ist die orientierte Krümmung $\varkappa_\alpha$ konstant $\neq 0$, so gilt Spur $\alpha \subset$ Kreislinie.

Der Beweis von a) ist trivial, da dann $t_\alpha'(s) = \varkappa_\alpha(s)\, n_\alpha(s) = 0$, also $\alpha''(s) \equiv 0$, d.h. α ist affin linear. Für b) holen wir etwas weiter aus:

Sei $D: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die orthogonale Abbildung

"Drehung um $90°$ gegen den Uhrzeigersinn".

Dann gilt nach Wahl von $n_\alpha(s)$:

$$n_\alpha(s) = D\left(t_\alpha(s)\right),$$

also:

$$n_\alpha'(s) = D\left(t_\alpha'(s)\right) = D\left(\varkappa_\alpha(s)\, n_\alpha(s)\right)$$

$$= \varkappa_\alpha(s)\, D\left(n_\alpha(s)\right) = \varkappa_\alpha(s)\,(D \circ D)\left(t_\alpha(s)\right)$$

$$= -\varkappa_\alpha(s)\, t_\alpha(s).$$

Also bekommen wir folgende Version der

<u>Frenet'schen Formeln für ebene Kurven</u>:

$$\boxed{t_\alpha' = \varkappa_\alpha\, n_\alpha\,, \quad n_\alpha' = -\varkappa_\alpha\, t_\alpha}\,.$$

Es handelt sich um ein lineares System für (t_α, n_α) mit stetigen Koeffizienten, und wie in § 2 kann man zeigen: Ist eine Funktion $\varkappa(s) \neq 0$ gegeben, so findet man zu jeder Vorgabe von $\alpha_0 \in \mathbb{R}^2$, (t_0, n_0) positiv orientierte ONB auf $\mathbb{R}^2$, genau eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\alpha : [s_0, s_1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\alpha(s_0) = \alpha_0$,

$$\varkappa_\alpha = \varkappa, \qquad t_\alpha(s_0) = t_0, \quad n_\alpha(s_0) = n_0 .$$

Nun zum Beweis von b) des Satzes: Ist $\varkappa_\alpha$ konstant $\neq 0$, so ist nach obigem Gleichungssystem

$$\frac{d}{ds}\left(\alpha(s) + \frac{1}{\varkappa_\alpha} n_\alpha(s)\right) = t_\alpha(s) + \frac{1}{\varkappa_\alpha} n_\alpha'(s) \equiv 0,$$

also

$$\alpha(s) + \frac{1}{\varkappa_\alpha} n_\alpha(s) \equiv \xi \in \mathbb{R}^2 .$$

Das bedeutet

$$|\alpha(s) - \xi| \equiv \frac{1}{|\varkappa_\alpha|},$$

alle Punkte $\alpha(s)$ liegen auf der Kreislinie um ξ mit Radius $1/|\varkappa_\alpha|$.

$\square$

Eine weitere einfache globale Aussage ist

<u>Satz</u>: Sei α eine nach der Bogenlänge parametrisierte geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$. Dann gilt:

$$\boxed{\max |\varkappa_\alpha| \geq 1/\operatorname{diam}(\operatorname{Spur} \alpha).}$$

Hierbei ist $\operatorname{diam}(\text{Spur}\,\alpha) := \max\limits_{p_1, p_2 \in [a,b]} |\alpha(p_1) - \alpha(p_2)|$

der Durchmesser von Spur α, und wir nehmen an, dass $[a,b]$

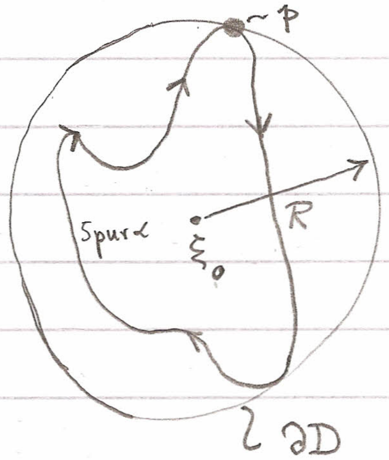
das Parameterintervall ist.

Beweis: Da die Spur von $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ kompakt ist,

können wir Spur α in eine abgeschlossene Kreisscheibe $D := \{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi - \xi_0| \leq R\}$ legen. Wählen wir hier R

minimal, so berührt Spur α den Rand ∂D in mindestens

einem Punkt p (sonst könnte man R verkleinern).



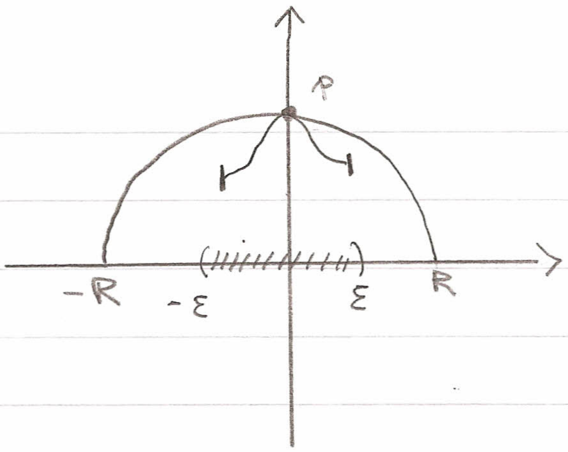
Nach geeigneter $\underbrace{\text{Drehung}}$ und Verschiebung

können wir p auf

die obere y-Achse bringen,

so daß α lokal bei p als Graph einer Funktion

$f: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ geschrieben werden kann.



Für ∂D haben wir dann die Darstellung als Graph von

$g(x) := \sqrt{R^2 - x^2}$. Für die weitere Rechnung beachte

man: a) f ist in 0 maximal, also $f'(0) = 0$;
(entsprechend für g)
b) 0 ist Minimum von $g - f$ und

$$g - f \geq 0 \quad \text{auf } (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Die Formel für die orientierte Krümmung im Graphenfall

ergibt sodann: $\quad (p = \alpha(s_0))$

$$|\varkappa_\alpha(s_0)| = |f''(0)| \Big/ \sqrt{1 + |f'(0)|^2}^{\,3} = |f''(0)| =$$

$$-f''(0) = \underbrace{g''(0) - f''(0)}_{\geq 0} - g''(0) \geq$$

$$-g''(0) \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ max. in } 0}}{=} |g''(0)| = |g''(0)| \Big/ \sqrt{1 + |g'(0)|}^{\,3} =$$

$$|\varkappa_{\text{Kreis}}| = 1/R \; .$$

Also ist $\max |\varkappa_\alpha| \geq 1/R$, und wegen

$\operatorname{diam}(\text{Spur } \alpha) \geq R$ (sonst passt Spur α in einen Kreis mit Rad. $< R$)

folgt die Behauptung.

$\square$

Als nächstes wollen wir den <u>Rotationsindex</u> für geschlossene Kurven $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ definieren, wobei wir wie <u>immer Parametrisierung nach der Bogenlänge annehmen.</u> (Dann ist natürlich $L =$ Länge Spur α!)

Sei ab jetzt $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ geschlossene Kurve mit Tangentialabbildung $t = \alpha' : [0, L] \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Mit α ist auch t eine geschlossene Kurve mit Spur in der Kreislinie S^1. Man stellt sich anschaulich vor: Wird Spur α durchlaufen, so durchläuft t den Einheitskreis einfach oder mehrfach, und diese Zahl der Durchläufe (mit